CC ENSI 91

AN15



ENSI 1991

Etude de $y'' = xy$

ÉNONCÉ

Objectifs du problème.

Le problème a pour objet l'étude de certaines solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre (E_1)

$$(E_1) \quad y'' = xy.$$

Dans la première partie, on montre que toutes les solutions réelles de (E_1) sont développables en série entière, et l'on construit des suites de polynômes approchant une solution uniformément sur tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.

Dans la deuxième partie, en comparant l'équation (E_1) à une autre équation dont les solutions sont connues, on décrit le comportement oscillatoire des solutions de (E_1) dans $]-\infty, 0[$.

La troisième partie enfin est consacrée à l'étude du comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$ d'une solution de (E_1) définie au moyen d'une représentation intégrale.

Ces trois parties sont largement indépendantes.

Première partie. — Construction de solutions de (E_1).

1° Solutions de (E_1) développables en série entière.

a) Montrer qu'il existe une solution unique de (E_1), notée A, telle que $A(0) = 1$ et $A'(0) = 0$.

Montrer de même qu'il existe une solution unique de (E_1), notée B, telle que $B(0) = 0$ et $B'(0) = 1$.

b) A quelles relations doit satisfaire la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que la somme $x \to y(x)$ de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

dont le rayon de convergence R est supposé *a priori* non nul, soit solution sur $]-R, +R[$ de l'équation (E_1).

c) Montrer que les fonctions A et B sont développables sur $\mathbb{R}$ en série entière ; on écrira ces séries entières sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n} \left(\text{resp} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{3n+1}\right)$$

et l'on exprimera les coefficients a_n et b_n à l'aide de n et des nombres α_n (resp β_n) définis par $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 1$, par

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(2 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(n - \frac{1}{3}\right),$$

$$\beta_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(2 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(n + \frac{1}{3}\right).$$

d) On désigne par Δ l'ensemble des solutions réelles de (E_1) sur $\mathbb{R}$. Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions réelles développables en série entière sur $\mathbb{R}$, et donner une base de ce sous-espace vectoriel.

2° Équivalence de (E_1) et d'une équation intégrale.

a) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a

$$\int_0^x \left(\int_0^u t f(t)\, dt\right) du = \int_0^x t(x - t) f(t)\, dt.$$

b) En déduire que toute solution $x \to y(x)$ de l'équation (E_1) telle que $y(0) = D_1$ et $y'(0) = D_2$, où D_1 et D_2 sont des réels donnés, vérifie sur $\mathbb{R}$ la relation (1)

$$y(x) = D_1 + D_2 x + \int_0^x t(x - t)\, y(t)\, dt. \qquad (1)$$

c) On suppose que $x \to y(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation (1) pour des valeurs particulières des réels D_1 et D_2. Prouver que y est solution de (E_1).

3° Approximation des solutions de (E_1).

Soit D_1 et D_2 deux constantes réelles données et P une fonction polynomiale donnée. On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ par

$$U_0(x) = P(x)$$

et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$U_{n+1}(x) = D_1 + D_2 x + \int_0^x t(x - t) U_n(t)\, dt.$$

a) Déterminer la suite (U_n) dans chacun des deux cas particuliers suivants :

$$P(x) = 1, \quad D_1 = 1, \quad D_2 = 0,$$
$$P(x) = x, \quad D_1 = 1, \quad D_2 = 1.$$

Montrer que, dans chacun de ces cas, la suite (U_n) converge uniformément sur tout intervalle fermé $[a, b]$ vers une solution de (E_1) que l'on précisera.

b) Revenant au cas général, où $P(x)$ est une fonction polynomiale arbitraire et D_1 et D_2 deux réels donnés quelconques, on pose, γ étant un nombre réel positif fixé,

$$\sup \{|U_1(t) - U_0(t)|,\ t \in [-\gamma, +\gamma]\} = K.$$

En exprimant $U_{n+1}(x) - U_n(x)$ en fonction de $U_n(x) - U_{n-1}(x)$ et en utilisant une récurrence, prouver que, pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout x de $[-\gamma, +\gamma]$, on a

$$|U_{n+1}(x) - U_n(x)| \leqslant K a_n |x|^{3n}$$

où les nombres a_n sont ceux définis dans la question 1° *c*).

c) Déduire de ce qui précède que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente sur $\mathbb{R}$, uniformément convergente sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et que sa fonction limite est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

DEUXIÈME PARTIE. — COMPORTEMENT DES SOLUTIONS DE (E_1) SUR $]-\infty, 0[$.

Soit Y une solution non nulle de (E_1) sur $]-\infty, 0[$. On se propose d'étudier les zéros de Y. Pour cela, on compare cette solution à la fonction Z définie sur $]-\infty, 0[$ par

$$Z(x) = (-x)^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2}\right).$$

1° Équation différentielle vérifiée par Z.

Montrer que Z vérifie sur $]-\infty, 0[$ l'équation différentielle

$$Z'' = \left(x + \frac{5}{16x^2}\right) Z.$$

2° Comparaison de Y et de Z.

a) Soit x_0 et x_1 deux réels distincts $(x_0 < x_1)$, de $]-\infty, 0[$. Prouver que

$$[Z'(x)Y(x) - Y'(x)Z(x)]_{x=x_0}^{x=x_1} = \frac{5}{16} \int_{x_0}^{x_1} \frac{Y(x)Z(x)}{x^2}\, dx.$$

b) On suppose que x_0 et x_1 sont deux zéros consécutifs de la fonction Z sur $]-\infty, 0[$ et que la fonction Y reste strictement positive sur $]x_0, x_1[$. Montrer que $[Z'(x)Y(x) - Y'(x)Z(x)]_{x=x_0}^{x=x_1}$ a le même signe que Z sur l'intervalle $]x_0, x_1[$.

c) Déduire de ce qui précède que, si x_0 et x_1 sont deux zéros consécutifs de Z, alors Y s'annule dans $]x_0, x_1[$. Montrer que Y admet dans $]-\infty, 0[$ une infinité de zéros.

TROISIÈME PARTIE. — COMPORTEMENT DES SOLUTIONS BORNÉES DE (E_1) AU VOISINAGE DE $+\infty$.

1° Espace vectoriel des solutions de (E_1) bornées sur $[0, +\infty[$.

a) Montrer que les solutions A et B de (E_1) ne sont pas bornées sur $[0, +\infty[$.

b) En déduire que le sous-espace vectoriel des solutions de (E_1) qui sont bornées sur $[0, +\infty[$ est de dimension 1 au plus.

Dans ce qui suit, une telle solution bornée est mise en évidence par une représentation intégrale, et on étudie son comportement au voisinage de $+\infty$.

2° Transformation de (E_1) sur $]0, +\infty[$.

Soit y une solution de (E_1) sur $]0, +\infty[$, et z la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$y(x) = \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)z(x).$$

Montrer que cette fonction z est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_2)\quad z'' - 2\sqrt{x}z' - \frac{1}{2\sqrt{x}}z = 0.$$

Pour tout x strictement positif, on pose

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}\,t^2)\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)dt.$$

3° Étude de la fonction I sur $]0, +\infty[$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, et pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^{n} \exp(-\sqrt{x}\,t^2)\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)dt.$$

a) Prouver la convergence de l'intégrale $I(x)$ pour tout x strictement positif.

b) Montrer que la suite de fonctions (I_n) converge uniformément vers la fonction I sur un intervalle que l'on précisera.

c) Prouver que les fonctions I_n sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que la suite (I'_n) des fonctions dérivées converge uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$. En déduire l'existence de la fonction dérivée I′ de I sur $]0, +\infty[$, et son expression sous forme d'une intégrale.

d) Prouver que I′ est également définie sur $]0, +\infty[$ par

$$I'(x) = -\int_0^{+\infty} t\exp(-\sqrt{x}\,t^2)\sin\left(\frac{t^3}{3}\right)dt.$$

e) Prouver que la fonction I est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle (E_2).

4° Expression intégrale des solutions bornées de (E_1) sur $]0, +\infty[$.

a) Montrer que la fonction y définie sur $]0, +\infty[$ par

$$y(x) = \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)I(x)$$

est solution de (E_1) sur $]0, +\infty[$. Déterminer sa limite lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Que peut-on en déduire concernant l'ensemble des solutions bornées de (E_1) sur $]0, +\infty[$?

5° Étude du comportement de I au voisinage de $+\infty$.

Dans ce qui suit, on admet sans démonstration les résultats numériques suivants :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2};\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2n}du = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

a) En majorant l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\exp(-\sqrt{x}\,t^2)\left|\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)-1\right|dt,$$

déterminer un équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Plus généralement, déterminer un nombre réel λ et une suite (δ_k) tels que, au voisinage de $+\infty$, et quel que soit l'entier $n > 0$, la différence $\left|I(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{\delta_k}{x^{(6k+1)\lambda}}\right|$ soit majorée par $\frac{|\delta_{n+1}|}{x^{(6n+7)\lambda}}$.

AN 15



CORRIGÉ ET COMMENTAIRES

I

1° *a)* L'application $(x, y) \to xy$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ étant continue, il en résulte l'existence des solutions uniques A et B définies sur $\mathbb{R}$ avec $A(0) = 1$, $A'(0) = 0$, $B(0) = 0$, $B'(0) = 1$. On sait aussi que l'ensemble des solutions de (E_1) définies sur $\mathbb{R}$ forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et, comme A et B sont linéairement indépendantes, c'est une base de cet espace.

> Rappelons le principe des conditions initiales dans le cas des équations linéaires.
> *Théorème* : soit I un intervalle réel, soient a et b des applications continues de I dans $\mathbb{R}$; soit S l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Alors S est un espace vectoriel réel de dimension 2. Pour tout x_0 de I, l'application qui à f associe le couple $(f(x_0), f'(x_0))$ est un isomorphisme de S sur $\mathbb{R}^2$.

b) Si $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, on a

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} = 2u_2 + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+3)u_{n+3}x^{n+1}$$

et, comme $xy(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1}$, il en résulte

$$u_2 = 0 \quad \text{et} \quad (n+2)(n+3)u_{n+3} = u_n .$$

Ces relations déterminent la suite (u_n) connaissant u_0 et u_1, on constate aussi que les séries ainsi obtenues sont de rayon de convergence $+\infty$.

c) Dans le résultat précédent, avec $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, on obtient

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n} \quad \text{avec} \quad a_0 = 1 \quad \text{et} \quad 9n\left(n - \frac{1}{3}\right)a_n = a_{n-1} \quad \text{pour } n \geqslant 1 ;$$

il en résulte

$$a_n = \frac{1}{9^n (n\,!)\alpha_n} \quad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

Comme $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, la somme de cette série est $A(x)$.
De même, avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, on obtient

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{3n+1} \quad \text{avec} \quad b_0 = 1 \quad \text{et} \quad 9n\left(n + \frac{1}{3}\right)b_n = b_{n-1} \quad \text{pour } n \geqslant 1 ;$$

il en résulte

$$b_n = \frac{1}{9^n (n\,!)\beta_n} \quad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

Comme $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, la somme de cette série est $B(x)$.

d) A et B forment une base de Δ et, comme A et B sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, tout élément de Δ est aussi développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

2° *a)* Posons

$$F(x) = \int_0^x \left(\int_0^u t f(t)\,dt\right) du, \qquad G(x) = \int_0^x t(x-t)f(t)\,dt = x\int_0^x t f(t)\,dt - \int_0^x t^2 f(t)\,dt.$$

Les applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ $t \to tf(t)$, $t \to t^2 f(t)$ et $u \to \int_0^u tf(t)\,dt$ étant continues, les fonctions F et G sont dérivables et on a

$$F'(x) = \int_0^x tf(t)\,dt, \qquad G'(x) = \int_0^x tf(t)\,dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = F'(x);$$

comme $F(0) = G(0) = 0$, il en résulte $F(x) = G(x)$ pour tout x.

b) De la relation $y''(x) = xy(x)$, on obtient par intégration, vu la continuité des fonctions, $y'(x) = D_2 + \int_0^x ty(t)\,dt$, D_2 constante, puis

$$y(x) = D_1 + D_2(x) + \int_0^x \left(\int_0^u ty(t)\,dt\right) du = D_1 + D_2 x + \int_0^x t(x - t)y(t)\,dt.$$

c) Si y est continue, il résulte du 2° *a)* qu'elle est aussi dérivable, avec $y'(x) = D_2 + \int_0^x ty(t)\,dt$, puis que y' est dérivable avec $y''(x) = xy(x)$.

La formule de Taylor avec reste intégral donne immédiatement la solution du problème

$$y'' = g(x),\ y(0) = D_1,\ y'(0) = D_2$$

c'est $y = f(x)$ avec $f(x) = D_1 + D_2 x + \int_0^x (x - t)g(t)\,dt.$

3° *a)* Si $U_0(x) = 1$, $D_1 = 1$, $D_2 = 0$, on a

$$U_1(x) = 1 + \int_0^x t(x - t)\,dt = 1 + \frac{x^3}{6} = 1 + a_1 x^3.$$

Montrons par récurrence sur n que $U_n(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^{3p}$; c'est vrai pour $n = 0$ et 1, si c'est vrai pour le rang n, on a

$$U_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x t(x - t)\left(\sum_{p=0}^{n} a_p t^{3p}\right)dt = 1 + \sum_{p=0}^{n} a_p \int_0^x t^{3p+1}(x - t)\,dt$$

et, comme

$$a_p \int_0^x t^{3p+1}(x - t)\,dt = a_p \left| x\frac{t^{3p+2}}{3p + 2} - \frac{t^{3p+3}}{3p + 3}\right|_0^x = \frac{a_p}{(3p + 2)(3p + 3)} x^{3p+3} = a_{p+1}x^{3p+3},$$

on a bien ce résultat.

Si $U_0(x) = x$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, on montre de même que

$$U_n(x) = \sum_{p=0}^{n} b_{p+1} x^{3p+1}.$$

Dans le premier cas, $U_n(x)$ est la somme des $n + 1$ premiers termes de la série de $A(x)$ et, dans le deuxième cas, c'est celle de la série de $B(x)$. Il en résulte immédiatement (propriété classique des séries entières) que la suite (U_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers A dans le premier cas et vers B dans le second cas.

b) L'inégalité proposée est vraie au rang 1 ; par récurrence, on la suppose vraie au rang n,

$$|U_{n+1}(x) - U_n(x)| \leqslant K a_n |x|^{3n},$$

alors $U_{n+2}(x) - U_{n+1}(x) = \int_0^x t(x - t)(U_{n+1}(t) - U_n(t))\,dt$ donne, si $x > 0$,

$$|U_{n+2}(x) - U_{n+1}(x)| \leqslant K a_n \int_0^x t(x-t)t^{3n}\,dt = K a_{n+1}|x|^{3n+3}$$

(*cf.* 3° *a*)). Ce résultat reste valable pour $x < 0$ (poser $x = -x'$ et faire le changement de variable de t en $-t$).

c) Soit γ tel que $[a, b] \subset [-\gamma, \gamma]$; alors, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$|U_{n+1}(x) - U_n(x)| \leqslant K a_{n+1} \gamma^{3n}.$$

Cette inégalité prouve que la série de terme général $U_{n+1}(x) - U_n(x)$, dont la somme des n premiers termes est $U_{n+1}(x) - U_0(x)$, converge normalement sur $[a, b]$ (convergence de la série de A en γ), donc uniformément et il en est de même de la suite (U_n).

Soit $U(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x)$; comme les fonctions U_n sont continues, il résulte de ce qui précède que U est continue sur $[a, b]$, donc sur $\mathbb{R}$. De plus, on a

$$\left|\int_0^x t(x-t)\,U(t)\,dt - \int_0^x t(x-t)U_n(t)\,dt\right|$$
$$\leqslant \sup_{t\in[-\gamma,\gamma]} |U(t) - U_n(t)| \int_0^{|x|} t(|x|-t)\,dt \leqslant \frac{\gamma^3}{6} \sup_{t\in[-\gamma,\gamma]} |U(t) - U_n(t)|,$$

pour tout $x \in [a, b]$; il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x t(x-t)U_n(t)\,dt = \int_0^x t(x-t)U(t)\,dt.$$

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$U(x) = D_1 + D_2(x) + \int_0^x t(x-t)U(t)\,dt$$

et U est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ (*cf.* I. 2° *c*)).

On peut exprimer en terme de normes sur les espaces de fonctions les résultats de ces questions.
Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour toute f de $\mathcal{C}$, on pose $L f(x) = \int_0^x t(x-t) f(t)\,dt$. On obtient ainsi une application linéaire de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$.
Pour tous $\gamma > 0$ et f de $\mathcal{C}$, on pose $\mu_\gamma(f) = \operatorname{Sup}_{x\in[-\gamma,\gamma]} |f(x)|$; pour toute application linéaire T de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$, on note $\nu_\gamma(T)$ la norme d'opérateur associée à μ_γ (éventuellement $+\infty$)

$$\nu_\gamma(T) = \operatorname{Sup}\left\{\frac{\mu_\gamma(Tf)}{\mu_\gamma(f)}\ ;\ f \in \mathcal{C},\quad f \text{ n'est pas nulle sur } [-\gamma, \gamma]\right\}$$

Notons δ_n l'élément particulier $\delta_n(x) = a_n x^{3n}$.
On montre facilement que pour tout n on a : $L\delta_n = \delta_{n+1}$.
Soit f dans $\mathcal{C}$; supposons que pour tout x de $[-\gamma, \gamma]$,

on a $\quad |f(x)| \leqslant c\,|\delta_n(x)|$;

comme δ_n a un signe constant entre 0 et x,

on a $\quad \mu_\gamma(f) \leqslant c\mu_\gamma(\delta_n) = c a_n \gamma^{3n}$.

Par récurrence facile $\qquad \mu_\gamma(L^n f) \leqslant a_n \gamma^{3n} \mu_\gamma(f)$;

ceci est vrai pour toute f donc $\nu_\gamma(L^n) \leqslant a_n \gamma^{3n}$.
Soit une série de fonctions $\sum u_n$ telle que u_0 est dans $\mathcal{C}$ et pour tout n :

$$u_{n+1} = L u_n.$$

On a $$\mu_\gamma(u_n) \leqslant a_n \gamma^{3n}\,;$$
donc la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[-\gamma, \gamma]$. En fait elle converge sur tout segment réel et sa somme est donc un élément de $\mathcal{C}$.
Soient g et φ_0 dans $\mathcal{C}$;
posons pour tout n $$\varphi_{n+1} = g + \mathrm{L}\varphi_n$$
soit $$u_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n \quad \text{on a} \quad \mathrm{L}u_n = u_{n+1}.$$
D'après ce qui précède la série $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment réel. Comme $\varphi_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} u_k$, la suite φ_n converge uniformément sur tout segment. Soit φ sa limite ; φ est dans $\mathcal{C}$; soit x un réel ; on a $|t(x-t)| \leqslant \frac{x^2}{4}$ pour tout t entre 0 et x ;
on a donc $|\mathrm{L}\varphi(x) - \mathrm{L}\varphi_n(x)| \leqslant \frac{x^2}{4}\mu_\gamma(\varphi - \varphi_n)$ avec $\gamma = |x|$.
On montre ainsi que pour tout x, $\mathrm{L}\varphi_n(x)$ tend vers $\mathrm{L}\varphi(x)$ et donc que, $\varphi = g + \mathrm{L}\varphi$.
Prenant $g(x) = \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2 x$ et $u_0 = 0$, cela signifie que φ est la solution du problème de Cauchy
$$y'' = xy\,;\ y(0) = \mathrm{D}_1 \quad \text{et} \quad y'(0) = \mathrm{D}_2.$$

II

1° On a
$$\mathrm{Z}(x)(-x)^{\frac{1}{4}} = \left(\cos\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\right),$$
d'où
$$\mathrm{Z}'(x)(-x)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\mathrm{Z}(x)(-x)^{-\frac{3}{4}} = (-x)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\right),$$
$$\mathrm{Z}'(x)(-x)^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\mathrm{Z}(x)(-x)^{-\frac{5}{4}} = \sin\left(\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\right),$$
$$\mathrm{Z}''(x)(-x)^{-\frac{1}{4}} - \frac{5}{16}\mathrm{Z}(x)(-x)^{-\frac{9}{4}} = -(-x)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\right),$$
$$\mathrm{Z}''(x)(-x)^{-\frac{1}{4}} = \left(-(-x)^{\frac{3}{4}} + \frac{5}{16}(-x)^{-\frac{9}{4}}\right)\mathrm{Z}(x),$$
et enfin
$$\mathrm{Z}''(x) = \left(x + \frac{5}{16x^2}\right)\mathrm{Z}(x).$$

2° *a*) Posons
$$\Phi(x) = \mathrm{Z}'(x)\mathrm{Y}(x) - \mathrm{Y}'(x)\mathrm{Z}(x),$$
Φ est dérivable et on a
$$\Phi'(x) = \mathrm{Z}''(x)\mathrm{Y}(x) - \mathrm{Y}''(x)\mathrm{Z}(x) = \frac{5}{16x^2}\mathrm{Y}(x)\mathrm{Z}(x)\,;$$
la continuité de $x \to \frac{5}{16x^2}\mathrm{Y}(x)\mathrm{Z}(x)$ sur $[x_0, x_1]$ donne, par intégration,
$$\Phi(x_1) - \Phi(x_0) = \frac{5}{16}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{Y}(x)\mathrm{Z}(x)}{x^2}\,dx.$$

b) Si $\mathrm{Z}(x) > 0$ (resp. < 0) sur $]x_0, x_1[$, la fonction $x \to \frac{\mathrm{Y}(x)\mathrm{Z}(x)}{x^2}$ est à valeur > 0 (resp. < 0) sur $]x_0, x_1[$, donc
$$\Phi(x_1) - \Phi(x_0) > 0 \text{ (resp. } < 0).$$

c) Supposons $Z(x) > 0$ sur $]x_0, x_1[$, alors $Z'(x_0) \geqslant 0$ et $Z'(x_1) \leqslant 0$. Si Y n'a pas de zéro dans $]x_0, x_1[$, on peut supposer $Y(x) > 0$ dans $]x_0, x_1[$, donc $Y(x_1) \geqslant 0$, $Y(x_0) \geqslant 0$; par la question précédente, on a

$$Z'(x_1)Y(x_1) > Z'(x_0)Y(x_0) \geqslant 0,$$

ce qui est impossible car $Z'(x_1)Y(x_1) \leqslant 0$, donc Y s'annule dans $]x_0, x_1[$.

Les zéros de Z sont ceux de la fonction $x \to \cos\left(\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\right)$; il y en a une infinité dans $]-\infty, 0[$, donc Y admet une infinité de zéros dans $]-\infty, 0[$.

On a affaire ici à une méthode importante pour trouver l'existence de zéros d'une solution d'une équation différentielle $y'' + qy = 0$ et même aussi localiser ces zéros.

Théorème : soient un segment $[a, b]$ et des applications continues p et q de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de $[a, b]$ on a $p(x) \leqslant q(x)$. Soit f une solution réelle de $y'' + p(x)y = 0$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, f ne s'annulant pas sur $]a, b[$. Soit g une solution réelle de $y'' + q(x)y = 0$. Alors g s'annule sur $]a, b[$ sauf si g est proportionnelle à f (donc $p = q$).

Preuve : f est réelle donc quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f > 0$ sur $]a, b[$. Supposons que g ne s'annule pas sur $]a, b[$; alors g y a un signe constant et l'on peut la supposer > 0 ; par continuité, on a $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \geqslant 0$. D'après la limite du taux d'accroissement on a $f'(a) \geqslant 0$ et $f'(b) \leqslant 0$.
Le wronskien $\delta = fg' - gf'$ vérifie

$$\delta(a) \leqslant 0, \quad \delta(b) \geqslant 0, \ \delta' = (p - q)fg \leqslant 0.$$

Donc δ décroît d'une valeur $\leqslant 0$ à une valeur $\geqslant 0$: δ est la fonction nulle.
Donc δ' aussi est nulle sur $[a, b]$; il en résulte que $p - q$ est la fonction nulle sur $]a, b[$ puis sur $[a, b]$ par continuité. Donc f et g sont des solutions de la même équation différentielle : $y'' + py = 0$ dont le wronskien est nul. Elles sont donc proportionnelles.

III

1° *a*) Comme $a_n > 0$ à pour tout n, on a $A(x) \geqslant 1 + a_1 x^3$ pour tout $x > 0$, donc

$$\lim_{x \to +\infty} A(x) = +\infty \ ;$$

de même, $\lim_{x \to +\infty} B(x) = +\infty$ car $B(x) \geqslant b_0 x$ pour tout $x > 0$. Par suite, A et B sont non bornées sur $[0, +\infty[$.

b) Comme A et B forment une base de l'espace des solutions de (E_1), le sous-espace vectoriel des solutions de (E_1) bornées sur $[0, +\infty[$ est de dimension au plus 1.

2° On peut écrire

$$z(x) = \exp\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)y(x),$$

d'où

$$z'(x) = [\sqrt{x}\, y(x) + y'(x)] \exp\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$z''(x) = \left[\frac{1}{2\sqrt{x}}y(x) + xy(x) + 2\sqrt{x}\, y'(x) + y''(x)\right] \exp\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$z''(x) - 2\sqrt{x}\, z'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} z(x) = [y''(x) - xy(x)] \exp\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) = 0.$$

3° *a*) Soit $x > 0$, la fonction $t \to \exp(-\sqrt{x}\, t^2) \cos \frac{t^3}{3}$ est continue sur $[0, +\infty[$. On a

$$\left|\exp(-\sqrt{x}\,t^2)\cos\frac{t^3}{3}\right| \leqslant \exp(-\sqrt{x}\,t^2)\,;$$

$$\lim_{t\to+\infty} t^2\exp(-\sqrt{x}\,t^2) = 0,$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale à la borne $+\infty$.

b) On a

$$I(x) - I_n(x) = \int_n^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}\,t^2)\cos\left(\frac{t^3}{3}\right) dt.$$

Soit α un réel > 0 ; pour tout $x \geqslant \alpha$, on a

$$|I(x) - I_n(x)| \leqslant \int_n^{+\infty} \exp(-\sqrt{\alpha}\,t^2)\,dt$$

(intégrale convergente). Comme $\lim_{n\to+\infty} \int_n^{+\infty} \exp(-\sqrt{\alpha}\,t^2)\,dt = 0$, la suite (I_n) converge uniformément vers I sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$, $\alpha > 0$, donc converge vers I sur $]0, +\infty[$.

c) On a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\exp(-\sqrt{x}\,t^2)\cos\frac{t^3}{3}\right] = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\,t^2\exp(-\sqrt{x}\,t^2)\cos\left(\frac{t^3}{3}\right);$$

l'application $(t, x) \to \frac{\partial}{\partial x}[\exp(-\sqrt{x}\,t^2)\cos\frac{t^3}{3}$ de $[0, n] \times]0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ est continue, donc I_n est de classe C^1 et (dérivation sous le signe $\int$)

$$I'_n(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^n t^2\exp(-\sqrt{x}\,t^2)\cos\left(\frac{t^3}{3}\right) dt.$$

L'intégrale

$$J(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} t^2\exp(-\sqrt{x}t^2)\cos\left(\frac{t^3}{3}\right) dt$$

est convergente pour tout $x > 0$ (preuve analogue à celle du 3° *a*)). On a

$$|I'_n(x) - J(x)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_n^{+\infty} t^2\exp(-\sqrt{\alpha}t^2)\,dt$$

(intégrale convergente) ; comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_n^{+\infty} t^2\exp(-\sqrt{x}t^2)\,dt = 0$, la suite (I'_n) converge uniformément sur $[\alpha, +\infty[$ vers J. Il en résulte que I est de classe C^1 sur $[\alpha, +\infty[$ et que $I'(x) = J(x)$ pour tout $x \geqslant \alpha$, donc sur $]0, +\infty[$.

d) On a

$$I'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} t^2\exp(-\sqrt{x}t^2)\cos\frac{t^3}{3}\,dt.$$

On peut écrire, pour $x > 0$,

$$I'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}t^2)\,d\sin\frac{t^3}{3}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left|\exp(-\sqrt{x}t^2)\sin\frac{t^3}{3}\right|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t\exp(-\sqrt{x}t^2)\sin\left(\frac{t^3}{3}\right) dt,$$

car $\lim_{x\to+\infty}\left(\exp(-\sqrt{x}t^2)\sin\frac{t^3}{3}\right) = 0$; il en résulte

$$I'(x) = -\int_0^{+\infty} t\exp(-\sqrt{x}t^2)\sin\left(\frac{t^3}{3}\right) dt.$$

e) En utilisant le résultat précédent, on montre, comme pour I, que I′ est de classe C^1 et que $I''(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \exp(-\sqrt{x}t^2)\sin\left(\frac{t^3}{3}\right)dt$ pour tout $x > 0$. Pour tout $x > 0$, on peut écrire (justification facile)

$$
\begin{aligned}
I''(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} t\exp(-\sqrt{x}t^2)\, d\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}t^2)[1 - 2\sqrt{x}t^2]\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)dt\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}t^2)\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)dt - \int_0^{+\infty} t^2\exp(-\sqrt{x}t^2)\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)dt\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}I(x + 2\sqrt{x}I'(x),
\end{aligned}
$$

donc I est solution de (E_2) sur $]0, +\infty[$.

Soit une intégrale paramétrée définissant une fonction de x, x parcourant un intervalle I : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x, t)\,dt$. On suppose que f est $\mathcal{C}^\infty$ comme fonction de deux variables. On suppose de plus que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe une application θ_n de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \theta_n(t)\,dt$ converge et que pour tout x de I on a

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)\right| \leqslant \theta_n(t).$$

Alors F est $\mathcal{C}^\infty$ sur I et pour tout n

$$F^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)\,dt.$$

En effet, on pose $F_p(x) = \displaystyle\int_0^p f(x, t)\,dt$ pour tout entier p et $G_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)\,dt$. Un premier théorème de cours affirme que

$$F_p^{(n)}(x) = \int_0^p \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)\,dt.$$

Comme $|F_p^{(n)}(x) - G_n(x)|$ est majoré par ε_p, indépendant de x : $\varepsilon_p = \displaystyle\int_p^{+\infty} \theta_n(t)\,dt$, qui tend vers 0, la dérivée n-ième de F_p converge uniformément sur I vers G_n. On en déduit d'après un autre théorème de cours le résultat voulu.

4° *a*) y est solution de E_1 sur $]0, +\infty[$ ainsi qu'il résulte du III. 2°. On a

$$|y(x)| \leqslant \exp\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\,dt \quad \text{pour } x \geqslant 1\,;$$

il en résulte $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

b) Il existe une solution de (E_1) définie sur **R** et coïncidant avec y sur $]0, +\infty[$ (conséquence de l'existence d'une solution unique de (E_1) définie sur **R** prenant en un point ainsi que sa dérivée des valeurs données), donc y est bornée sur tout intervalle $]0, a]$, $a > 0$ et, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$, y est bornée sur $]0, +\infty[$. Il en résulte que l'ensemble des solutions de (E_1) bornées sur $]0, +\infty[$ est de dimension 1 et engendré par y.

La solution bornée de (E_1) est définie à un facteur près. On peut prouver autrement son existence.
A et B sont des fonctions non polynômiales qui sont des sommes de séries entières à coefficients positifs. Elles tendent vers $+\infty$ en $+\infty$; il en est de même de leurs dérivées.
Le wronskien de A et de B est constant
si $\delta = AB' - BA'$ alors $\delta' = 0$;
comme $\delta(0) = 1$ on a toujours $AB' - BA' = 1$.
Posons $f = \dfrac{A}{B}$ et $g = \dfrac{A'}{B'}$ on a $f' = \dfrac{-1}{B^2}$ et $g' = \dfrac{x}{B'^2}$.
Donc f décroît et g croît. Comme $f - g = \dfrac{1}{BB'}$, $f - g$ est positive et tend vers 0 en $+\infty$. Il en résulte l'existence d'un α unique, limite commune de f et de g.
Posons $C = A - \alpha B$. C est une solution de (E_1), $C > 0$, $C' < 0$ donc C décroît sur $]0, +\infty[$ en restant >0. Donc C est bornée.

5° *a*) On sait que $\left|\cos\left(\dfrac{t^3}{3}\right) - 1\right| \leqslant \dfrac{t^6}{18}$, d'où

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}t^2)\left|\cos\frac{t^3}{3} - 1\right| dt \leqslant \frac{1}{18}\int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}t^2)t^6\, dt\ ;$$

le changement de variable $t = \dfrac{u}{x^{\frac{1}{4}}}$ donne

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}t^2)t^6\, dt = \frac{1}{x^{\frac{7}{4}}}\int_0^{+\infty} \exp(-u^2)u^6\, du = \frac{1 \times 3 \times 5}{2^3} \times \frac{1}{x^{\frac{7}{4}}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}t^2)\left|\cos\left(\frac{t^3}{3}\right) - 1\right| dt \leqslant \frac{\beta}{x^{\frac{7}{4}}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1 \times 3 \times 5}{18 \times 2^3}.$$

Comme

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}t^2}\, dt = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

on a

$$\left|\frac{I(x)}{x^{-\frac{1}{4}} \times \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}} - 1\right| \leqslant \frac{\beta}{x^{\frac{3}{2}}}$$

et, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\beta}{x^{\frac{3}{2}}} = 0$, il en résulte que $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}x^{-\frac{1}{4}}$ est un équivalent de $I(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Plus généralement, on a

$$\left|\cos\theta - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\theta^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{\theta^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

d'où

$$\left|I(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{(2k)!} \times \frac{1}{9^k}\int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}t^2)t^{6k}\, dt\right| \leqslant \frac{1}{(2n+2)!} \times \frac{1}{9^{n+1}}\int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}t^2)t^{6(n+1)}\, dt.$$

On a

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}t^2)t^{6k}\, dt = \frac{1}{x^{\frac{6k+1}{4}}}\int_0^{+\infty} \exp(-u^2)u^{6k}\, du =$$

$$= \frac{\left(3k-\frac{1}{2}\right)\left(3k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}}{x^{\frac{6k+1}{4}}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{pour } k \geqslant 1.$$

Il en résulte

$$\lambda = \frac{1}{4}, \quad \delta_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \delta_k = (-1)^k \frac{\left(3k-\frac{1}{2}\right)\left(3k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}}{(2k)!\,9^k} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{pour } k \geqslant 1.$$

Ce problème étudie de diverses façons l'équation différentielle

$$y'' - xy = 0.$$

(*a*) Développement en série des solutions (partie I).

(*b*) Calcul d'une suite récurrente qui permet de donner une approximation des solutions (partie I).

Cette méthode s'emploie dans le cas non linéaire également. Soit le problème de Cauchy pour les fonctions vectorielles

$$\begin{cases} Y' = F(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0, \end{cases}$$

On utilise en fait l'équation intégrale

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, Y(t))\,dt.$$

On trouvera autour de x_0 la solution par passage à la limite de $Y_n(x)$

$$Y_0(x) = Y_0 \quad \text{pour tout } n \geqslant 0 \quad Y_{n+1}(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, Y_n(t))\,dt.$$

(*c*) Une transformation définie en partie II permet d'étudier l'oscillation sur $]-\infty, 0[$: il apparaît une infinité de zéros sur $]-\infty, 0[$.

(*d*) La mise des solutions sous forme intégrale (partie III) permet d'étudier leur comportement asymptotique en $+\infty$.